

# LA METHODE DU MODELE RUGUEUX (MMR) APPLICATION AU CALCUL DE LA PROFONDEUR NORMALE DANS UNE CONDUITE CIRCULAIRE

**B.ACHOUR, S.SEHTAL**

Laboratoire de Recherche en Hydraulique Souterraine et de Surface (LARHYSS)  
Université de Biskra, PO Box 145 RP 07000 Biskra, Algerie  
bachir.achour@larhyss.net

## ABSTRACT

A new method is presented to compute the normal depth in circular conduit. This is the rough model method (RMM). It states that the linear dimension of a conduit or channel is equal to the linear dimension of a referential rough model corrected by the effect of a non-dimensional correction factor. The method is based on the Colebrook-White and Darcy-Weisbach relationships, applicable to the entire domain of turbulent flow. From the relationship governing the flow in the rough model, the normal depth in a circular conduit is explicitly deduced.

## RESUME

Une nouvelle méthode est présentée pour calculer la profondeur normale dans une conduite circulaire. C'est la méthode du modèle rugueux (MMR). Elle énonce que la dimension linéaire d'une conduite ou d'un canal est égale à la dimension linéaire d'un modèle rugueux de référence corrigée par l'effet d'un facteur de correction adimensionnel. La méthode est basée sur les relations de Colebrook-White et de Darcy-Weisbach, applicables à l'ensemble du domaine de l'écoulement turbulent. De la relation qui régit l'écoulement dans le modèle rugueux, la profondeur normale dans une conduite circulaire est explicitement déduite.

## 1 INTRODUCTION

Les méthodes de calcul de l'écoulement uniforme dans les conduits et canaux ne sont pas nombreuses. Quelques unes d'entre elles sont graphiques ou itératives (Chow, 1973). Pour les conduits circulaires et non-circulaires, des méthodes de calcul explicite ont été proposées par le passé et nous pouvons citer par exemple la méthode de Swamee et Swamee (2008). Dans cette méthode, le dimensionnement des conduites non-circulaires est basé sur une relation similaire à celle établie pour les conduites circulaires en charge par Swamee et Jain (1976):

$$D = k_D L \quad (1)$$

Avec

$$L = \left\{ \varepsilon \left[ Q^2 / (gi) \right]^{4,8} + 8\nu Q^{9,4} / (gi)^{5,2} \right\}^{0,04} \quad (2)$$

où  $D$  est la dimension verticale de la conduite,  $k_D$  est une constante dépendant de la forme de la conduite et  $L$  est une dimension linéaire dont le sens physique n'a pas été spécifié. Notons que la relation (1) n'est applicable que pour le taux de remplissage de 75%. Dans la relation (2),  $Q$  est le débit volume,  $\varepsilon$  est la rugosité absolue caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite,  $g$  est l'accélération

de la pesanteur,  $i$  est la pente longitudinale de la conduite et  $\nu$  est la viscosité cinématique du liquide en écoulement. Dans l'étude de Swamee et Swamee (2008), une relation explicite approximative est proposée pour l'estimation du taux de remplissage des conduites circulaires et non-circulaires :

$$\eta = k_{n1} \left[ k_{n2} (Q_{\max} / Q - 1)^{k_{n3}} + 1 \right]^{-k_{n3}} \quad (3)$$

où  $k_{n1}$ ,  $k_{n2}$  et  $k_{n3}$  sont des constantes qui dépendent de la forme géométrique du profil de la conduite considérée. Notons que l'application de l'équation (3) requière la connaissance du débit volume maximum dont l'expression est établie en se basant sur l'analyse statistique de plusieurs courbes. Selon les auteurs, la relation (3) est applicable pour les taux de remplissage supérieurs à 30% et elle occasionne une erreur relative maximale d'environ 1%. Dans cet article, une méthode simple est proposée pour le dimensionnement des conduites et canaux, ainsi que pour la détermination de la profondeur normale. Elle est basée sur l'ajustement d'une seule courbe, celle d'un modèle rugueux de référence ayant la même forme que la conduite considérée. Toutes les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement dans la conduite considérée sont directement

déduites de celles d'un modèle rugueux de référence qui sont des caractéristiques connues. La méthode de calcul est présentée à travers un exemple pratique appliqué à la conduite circulaire.

## 2 RELATION FONDAMENTALE DE LA MMR

Considérons dans un premier temps une conduite circulaire de diamètre  $D$ , écoulant le débit volume  $Q$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\nu$ , sous une pente longitudinale  $i$ . L'état interne de la conduite est caractérisé par la rugosité absolue  $\varepsilon$ . Dans un second temps, considérons un modèle rugueux de référence de même forme, défini par le diamètre  $\bar{D} \neq D$ , le débit volume  $\bar{Q} = Q$ , la viscosité cinématique  $\bar{\nu} = \nu$  et la pente longitudinale  $\bar{i} = i$ . L'état interne de la paroi du modèle est caractérisé par la rugosité relative  $\varepsilon / \bar{D}_h = 0,037$ , où  $\bar{D}_h$  est le diamètre hydraulique. En raison de la forte rugosité relative, l'écoulement dans le modèle est turbulent rugueux impliquant un coefficient de frottement  $\bar{f} = 1/16$  selon la relation de Colebrook-White (1939) pour un nombre de Reynolds  $R \rightarrow \infty$ . Les diamètres  $D$  et  $\bar{D}$  sont non seulement différents, mais sont gouvernés par l'inégalité  $\bar{D} > D$ . Entre les diamètres  $D$  et  $\bar{D}$ , nous pouvons écrire l'équation suivante :

$$D = \psi \bar{D} \quad (4)$$

où  $\psi$  est le facteur de correction des dimensions linéaires adimensionnel tel que  $0 < \psi < 1$ . L'équation (4) est la relation fondamentale de la MMR. Elle peut être généralisée à toute forme de conduites et canaux, en écrivant que :

$$L = \psi \bar{L} \quad (5)$$

où  $L$  est une dimension linéaire quelconque, telle que la largeur d'un canal rectangulaire, le rayon hydraulique, le diamètre d'une conduite circulaire en charge ou la dimension linéaire verticale d'une conduite non-circulaire fermée, etc. Equation (5) peut être écrite sous la forme  $L^2 = \psi^2 \bar{L}^2$  et puisque  $L^2$  et  $\bar{L}^2$  sont respectivement proportionnels aux aires des sections mouillées  $A$  et  $\bar{A}$ , alors nous pouvons écrire que :

$$A = \psi^2 \bar{A} \quad (6)$$

## 3 FACTEUR DE CORRECTION ADIMENSIONNEL DES DIMENSIONS LINEAIRES

La relation de Colebrook-White (1939) est applicable à n'importe quel profil géométrique de conduits ou canaux, puisque le facteur de forme  $\phi = R_{h,e} / R_h$  a un effet de

second ordre (Sinniger and Hager, 1989), où  $R_{h,e}$  est le rayon hydraulique effectif. La relation de Colebrook-White (1939) peut alors s'écrire:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon / D_h}{3,7} + \frac{2,51}{R \sqrt{f}} \right) \quad (7)$$

où  $f$  est le coefficient de frottement et  $R$  est le nombre de Reynolds. Selon l'équation (5), nous pouvons écrire les relations suivantes:

$$D_h = \psi \bar{D}_h \quad (8)$$

$$R = \frac{4Q}{P\nu} = \frac{4Q}{\psi P\nu} = \psi^{-1} \bar{R} \quad (9)$$

En tenant compte de la relation de Darcy-Weisbach (1854), la pente longitudinale de la conduite peut s'écrire :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} = \bar{i} = \frac{\bar{f}}{\bar{D}_h} \frac{Q^2}{2g\bar{A}^2} \quad (10)$$

D'où:

$$\frac{f}{D_h A^2} = \frac{1}{16 \bar{D}_h \bar{A}^2} \quad (11)$$

En insérant les équations (6) and (8) dans l'équation (11), nous pouvons déduire que:

$$\psi = (16f)^{1/5} \quad (12)$$

La combinaison des équations (6), (7), (9) et (12), mène à:

$$\psi^{5/2} \log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2} \bar{R}} \right) = -2 \quad (13)$$

L'équation (13) est implicite vis-à-vis du facteur de correction  $\psi$  qui doit être alors estimé graphiquement ou calculé à l'aide d'une procédure itérative. Pour éviter cet inconvénient, nous pouvons utiliser l'excellente relation approchée suivante, obtenue par une analyse statistique (Achour and Bedjaoui, 2006; Achour, 2012; Achour and Bedjaoui, 2013):

$$\psi \cong 1.35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4.75} + \frac{8.5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (14)$$

Une étude comparative a été faite entre les équations (13) et

(14), en faisant varier  $\varepsilon / \bar{D}_h$  de 0 à 0,02. Il a été trouvé que le maximum de déviation est inférieur à 0,4% pour  $\bar{R} \geq 2200$  correspondent à  $R \geq 2300$ . L'équation (14) est applicable dans tout le domaine de l'écoulement turbulent, correspondant à  $R \geq 2300$  and à la large

gamme  $0 \leq \varepsilon / D_h \leq 0,05$ . Combinée à l'équation (5), l'équation (14) est applicable à n'importe quelle forme de conduite ou de canal. Elle est valable pour tout taux de remplissage et pour tout paramètre de forme du canal. Elle est plus générale que la relation (1).

#### 4 CALCUL DE LA PROFONDEUR NORMALE DANS UNE CONDUITE CIRCULAIRE PAR LA MMR

Pour le modèle rugueux, la relation de Chézy peut s'écrire :

$$\bar{Q} = Q = \bar{C} \bar{A} \sqrt{\bar{R}_h i} \quad (15)$$

Puisque  $\bar{f} = 1/16$ , alors nous pouvons écrire que  $\bar{C} = \sqrt{8g/\bar{f}} = 8\sqrt{2g}$ . L'aire de la section mouillée  $\bar{A}$  est gouvernée par la relation suivante:

$$\bar{A} = \frac{\bar{D}^2}{4} \left[ \cos^{-1}(1-2\bar{\eta}) - 2(1-2\bar{\eta})\sqrt{\bar{\eta}(1-\bar{\eta})} \right] \quad (16)$$

où  $\bar{\eta} = y_n / \bar{D}$  est le taux de remplissage de la conduite et  $y_n$  est la profondeur normale. L'équation (16) peut d'écrire:

$$\bar{A} = \frac{\bar{D}^2}{4} \sigma(\bar{\eta}) \varphi(\bar{\eta}) \quad (17)$$

où:

$$\sigma(\bar{\eta}) = \cos^{-1}(1-2\bar{\eta}) \quad (18)$$

$$\varphi(\bar{\eta}) = 1 - \frac{2(1-2\bar{\eta})\sqrt{\bar{\eta}(1-\bar{\eta})}}{\cos^{-1}(1-2\bar{\eta})} \quad (19)$$

Le périmètre mouillé  $\bar{P}$  est donné par:

$$\bar{P} = \bar{D} \cos^{-1}(1-2\bar{\eta}) \quad (20)$$

ou bien :

$$\bar{P} = \bar{D} \sigma(\bar{\eta}) \quad (21)$$

Le rayon hydraulique  $\bar{R}_h = \bar{A} / \bar{P}$  est donc:

$$\bar{R}_h = \frac{\bar{D}}{4} \varphi(\bar{\eta}) \quad (22)$$

En tenant compte des équations (17) et (22) et le fait que  $\bar{C} = 8\sqrt{2g}$ , la relation (15) peut alors s'écrire:

$$\bar{Q} = Q = \sqrt{2} \sqrt{gi\bar{D}^5} \sigma(\bar{\eta}) [\varphi(\bar{\eta})]^{3/2} \quad (23)$$

La conductivité relative  $\bar{Q}^* = \bar{Q} / \sqrt{gi\bar{D}^5}$  est alors:

$$\bar{Q}^* = \sqrt{2} \sigma(\bar{\eta}) [\varphi(\bar{\eta})]^{3/2} \quad (24)$$

La conductivité relative  $\bar{Q}^*$  dans le modèle rugueux est

donc fonction du taux de remplissage  $\bar{\eta}$ . La relation (24) a été graphiquement représentée sur la figure 1. Elle montre que la variation de la conductivité relative débute par une phase ascendante, atteint alors un maximum et subit ensuite une phase descendante au-delà du maximum. Le calcul a montré que la conductivité relative maximale est atteinte pour le taux de remplissage  $\bar{\eta} \square 0,95$ .

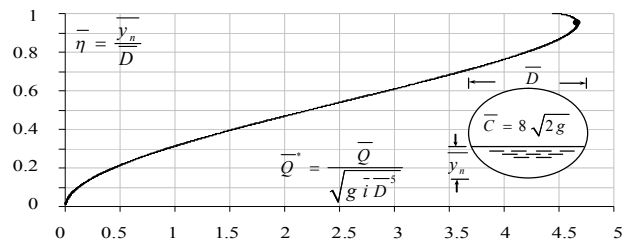


Figure 1: Tracé de l'équation (24) pour le modèle rugueux. (●) Conductivité relative maximale correspondent à  $\bar{\eta} \square 0,95$ .

Dans la large gamme  $0,15 \leq \bar{\eta} \leq 0,85$ , correspondent à  $0,255 \leq \bar{Q}^* \leq 4,433$ , une étude particulière de la relation (24) a montré que le taux de remplissage  $\bar{\eta}$  pouvait s'exprimer, avec une erreur relative maximale inférieure à 0,3% seulement, par la relation approchée suivante:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\bar{\eta}\right) = 0,432 \bar{Q}^{*0,519} \quad (25)$$

En utilisant le théorème de Lagrange, Swamee et Rathie (2004) ont donné l'expression du taux de remplissage sous la forme d'une série illimitée, dépendant cependant du coefficient de Chézy et de Manning. Le résultat final s'obtient après avoir tronquée la série, menant ainsi à taux de remplissage approximatif. Swamee et Rathie ont présenté une relation implicite pour le coefficient de résistance de Chézy, dépendant du taux de remplissage.

Considérons un modèle rugueux de référence de diamètre  $\bar{D}$  égal à celui d'un modèle rugueux à l'état plein correspondent à  $\bar{\eta} = 1$ ; pour cet état, les équations (18) et (19) donnent respectivement  $\sigma(\bar{\eta}) = \pi$  et  $\varphi(\bar{\eta}) = 1$ . Ainsi, l'équation (24) mène à écrire  $\bar{Q}^* = \pi\sqrt{2}$ . Pour cette valeur,

la figure 1 indique un taux de remplissage  $\bar{\eta} \approx 0,852$ . Nous obtenons alors un modèle rugueux de diamètre égal à celui du modèle à l'état plein, caractérisé par un taux de remplissage  $\bar{\eta} \approx 0,852$ . Pour ce taux de remplissage, les relations (21) et (22) permettent d'écrire respectivement que :

$$\bar{P} = 2,352\bar{D} \quad (26)$$

$$\bar{D}_h = 1,2126\bar{D} \quad (27)$$

Le diamètre du modèle rugueux à l'état plein est obtenu pour la conductivité relative  $\bar{Q}^* = \pi\sqrt{2}$ , impliquant que :

$$\bar{D} = (\pi\sqrt{2})^{-0.4} \left( \frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0.4} \quad (28)$$

Pour les données du problème, c'est à dire  $Q, D, i, \varepsilon$  et  $\nu$ , les équations (28), (26) et (27) sont utilisées pour calculer respectivement les caractéristiques  $\bar{D}$ ,  $\bar{P}$  et  $\bar{D}_h$  d modèle rugueux de référence et donc la valeur du nombre de Reynolds  $\bar{R} = 4Q / (\bar{P}\nu)$ . Pour les valeurs calculées de  $\bar{D}_h$  et  $\bar{R}$ , l'équation (14) permet de calculer explicitement le facteur de correction adimensionnel des dimensions linéaires  $\psi$ .

Si nous affectons au modèle rugueux de référence la nouvelle dimension linéaire  $D/\psi$ , selon la relation(4), le taux de remplissage  $\bar{\eta}$  dans le modèle rugueux serait égal au taux de remplissage  $\eta$  de la conduite considérée. Le taux de remplissage  $\eta$  est donné par la relation (25) pour la conductivité relative  $\bar{Q}^* = Q / \sqrt{gi(D/\psi)^5}$ .

La profondeur normale recherchée est alors  $y_n = \eta D$ .

**Exemple pratique**

Calculer la profondeur normale dans une conduite circulaire pour les données suivantes, en utilisant la MMR :

$$Q = 3m^3 / s, \quad D = 2m, \quad i = 5 \times 10^{-4}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \\ \nu = 10^{-6} m^2 / s$$

- Calculons le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux par la relation (28) :

$$\bar{D} = (\pi\sqrt{2})^{-0.4} \left( \frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0.4} \\ = (\pi \times \sqrt{2})^{-0.4} \left( \frac{3}{\sqrt{9,81 \times 5 \times 10^{-4}}} \right)^{0.4} \\ \approx 2,475m$$

- Selon la relation (26), le périmètre mouillé  $\bar{P}$  est :  $\bar{P} = 2,352\bar{D} = 2,352 \times 2,475 = 5,8212m$

- Le nombre de Reynolds  $\bar{R}$  est :  $\bar{R} = 4Q / (\bar{P}\nu) = 4 \times 3 / (5,8212 \times 10^{-6}) = 2061430,63$

- Selon la relation (14), le facteur de correction adimensionnel des dimensions linéaires  $\psi$  est alors :

$$\psi \cong 1,35 \left[ -\log \left( \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \\ = 1,35 \times \left[ -\log \left( \frac{8,5}{2061430,63} \right) \right]^{-2/5} = 0,6884$$

- Calculons la conductivité relative  $\bar{Q}^*$  pour la nouvelle dimension linéaire

$$\bar{D} = D / \psi = 2 / 0,6884 = 2,905m . D'où : \\ \bar{Q}^* = Q / \sqrt{gi(D/\psi)^5} \\ = 3 / \sqrt{9,81 \times 5 \times 10^{-4} \times 2,905^5} = 2,978$$

- Selon la relation (25), le taux de remplissage est alors :

$$\bar{\eta} = \eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1}(0,432 \bar{Q}^{*0,519}) \\ = \frac{11}{5 \times \pi} \times \sin^{-1}(0,432 \times 2,978^{0,519}) \\ \approx 0,605$$

- La valeur recherchée de la profondeur normale est alors:

$$y_n = \eta D = 0,605 \times 2 = 1,21m$$

Vérifions les calculs en déterminant le débit volume  $Q$  par la relation (15). Pour la valeur calculée du taux de remplissage  $\bar{\eta} = \eta = 0,605$ , les équations (18) et (19) donnent respectivement:

$$\begin{aligned}\sigma(\bar{\eta}) &= \cos^{-1}(1-2\bar{\eta}) \\ &= \cos^{-1}(1-2 \times 0,605) = 1,7824 \\ \varphi(\bar{\eta}) &= 1 - \frac{2(1-2\bar{\eta})\sqrt{\bar{\eta}(1-\bar{\eta})}}{\cos^{-1}(1-2\bar{\eta})} \\ &= 1 - \frac{2 \times (1-2 \times 0,605) \times \sqrt{0,605 \times (1-0,605)}}{\cos^{-1}(1-2 \times 0,605)} \\ &= 1,1152\end{aligned}$$

Selon la relation (17) l'aire de la section mouillée  $\bar{A}$  est :

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \frac{\bar{D}^2}{4} \sigma(\bar{\eta}) \varphi(\bar{\eta}) = \frac{2,905^2}{4} \times 1,7824 \times 1,1152 \\ &= 4,1936 m^2\end{aligned}$$

Selon la relation (22), le rayon hydraulique  $\bar{R}_h$  est alors:

$$\bar{R}_h = \frac{\bar{D}}{4} \varphi(\bar{\eta}) = \frac{2,905}{4} \times 1,1152 = 0,81 m$$

Finalement, l'équation (15) mène à écrire que :

$$\begin{aligned}\bar{Q} = Q &= \bar{C} \bar{A} \sqrt{\bar{R}_h i} \\ &= 8 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 4,1936 \times \sqrt{0,81 \times 5 \times 10^{-4}} \\ &= 2,99 m^3 / s \approx 3 m^3 / s\end{aligned}$$

Comme nous pouvons le constater, le débit volume calculé correspond au débit volume imposé dans l'énoncé, confirmant ainsi la validité des calculs effectués.

Les calculs auraient pu être également vérifiés en utilisant la relation générale du débit volume (Achour and Bedjaoui, 2006). Notons avec instance que le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy ou  $n$  de Manning n'a pas été nécessaire pour le calcul de la profondeur normale.

## 5 CONCLUSION

Une nouvelle méthode de calcul de la profondeur normale dans une conduite circulaire est présentée. C'est la méthode du modèle rugueux (MMR) qui stipule que toute dimension linéaire d'une conduite ou d'un canal est égale à la dimension linéaire d'un modèle rugueux de référence, corrigé par les effets d'un factor de correction adimensionnel.

La méthode est basée sur les relations de Colebrook-White et de Darcy-Weisbach et est, de ce fait, valable dans tout le domaine de l'écoulement turbulent.

L'application de la méthode à la détermination de la profondeur normale dans une conduite circulaire est présentée. Cela a mené à l'établissement d'une excellente relation approchée du taux de remplissage de la conduite, dépendant de la conductivité relative dans le modèle rugueux de référence. Celui-ci est caractérisé par un diamètre égal à celui du modèle rugueux à l'état plein et par un taux de remplissage de 0,852. La relation obtenue permet de déduire explicitement la profondeur normale dans la conduite considérée, en utilisant la relation fondamentale de MMR. Un exemple pratique est présenté pour expliquer le processus de calcul, en notant que le coefficient de Chézy ou celui de Manning n'est pas requis.

## REFERENCES

- [1] Achour B., Bedjaoui A. (2006). Discussion. Exact solutions for normal depth problem, Journal of Hydraulic Research, Vol. 44, n°5, 715-717.
- [2] Achour B. (2013). Design of Pressurized Vaulted Rectangular Conduits Using the Rough Model Method, Advanced Materials Research, Vols. 779-780, 414-419, Trans. Tech. Publications, Switzerland. doi:10.4028/www.scientific.net/AMR.779-780.414.
- [3] Achour B., Bedjaoui A. (2012). Turbulent Pipe-flow Computation Using The Rough Model Method (RMM), Journal of civil engineering and science, Vol.1, n°1, 36-41.
- [4] Chow V.T. (1973). Open-Channel Hydraulics, Editions McGraw Hill, New York.
- [5] Colebrook C.F. (1939). J. Inst. Civil Eng., 11, 133-156.
- [6] Darcy H. (1854). Sur les recherches expérimentales relatives au mouvement des eaux dans les tuyaux, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 38, 1109-1121.
- [7] Sinniger R.O., Hager, W.H. (1989). Constructions hydrauliques, Editions Presses Polytechniques Romandes, Suisse.
- [8] Swamee P.K., Jain, A.K. (1976). Explicit equations for pipe-flow problems, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 102 (HY5), 657-664, (HY11), 1707-1709.
- [9] Swamee P.K., Swamee N. (2008). Design of noncircular sewer sections, Journal of Hydraulic Research, Vol. 46, n°2, 277-281.
- [10] Swamee P.K., Rathie P.N. (2004). Exact solutions for normal depth problem, Journal of Hydraulic Research, Vol. 42, n°5, 541-547.