

ANALYSE NUMERIQUE DE CONCENTRATION DES CONTRAINTES AUTOUR D'UNE CAVITE CIRCULAIRE SOUMISE A UN CHARGEMENT BIAXIAL AUX LIMITES

NUMERICAL ANALYSIS OF STRESS CONCENTRATION AROUND A CIRCULAR CAVITY SUBJECTED TO BIAXIAL LOADING AT THE LIMITS

M.F. BOUALI⁽¹⁾, A. HAMAIDIA⁽²⁾, H. KOUAOUCHA⁽³⁾

⁽¹⁾ Département de Génie Civil, Faculté des Sciences et Technologie, Université Mohammed Chérif Messadia, Souk Ahras
b.meriemfakhreddine@gmail.com

⁽²⁾ Génie Civil, Matériaux, Structures et Energétiques du bâtiment, Université de Lorraine, France
Hamaidia_achref@hotmail.com

⁽³⁾ Département de Génie Civil, Faculté des Sciences et Technologie, Université Mohammed Chérif Messadia, Souk Ahras, L'Algérie

RESUME

Il a été constaté que les défaillances de structure des navires et des structures offshore, les chaudières ou les immeubles de grande hauteur soumis à des catastrophes naturelles sont dues à la concentration des contraintes. Cette dernière se produit principalement en raison de discontinuités. Elle provoque des dégradations de la résistance et une défaillance prématurée des structures [1], [2]. Dans cette optique, ce travail vise une analyse numérique (Flac^{2D}) de concentration des contraintes autour d'une cavité circulaire soumise à un chargement bi axial opposé aux limites. Le facteur de concentration de contraintes a été évalué numériquement pour trois cas de chargement : compression bi axiale, traction uni axiale [3] et chargement bi axial opposé aux limites. Les résultats obtenus numériquement sont en très bon accord avec ceux analytiques.

MOTS CLES: Analyse Numérique, Contraintes, Facteur de Concentration des Contraintes, Cavité, Chargement Bi axial.

ABSTRACT

It was found that structural failure of ships and offshore structures, boilers or great height buildings subject to natural disasters is due to the stress concentration. The latter occurs mainly due to discontinuities. It causes degradations of the resistance and premature failure of the structures [1] [2]. With this in mind that work is a numerical analysis of stresses (Flac^{2D}) concentration around a circular hole subject to biaxial loading at the limits. The stress concentration factor has been evaluated numerically for three loading cases: biaxial compression, uniaxial tension [3] and opposite biaxial loading. The results obtained numerically are in very good agreements with those analytical.

KEYWORDS: Numerical Analysis, Biaxial Loading, Cavity, Stresses, Stress Concentration Factor.

ملخص

وجد بان انهيار المنشآت الهيكلية للسفن و المنشآت البحرية و المباني ذات الارتفاع الكبير عند خضوعها للكوارث الطبيعية راجع الى تركيز الإجهاد. هذا الأخير يرجع الى عدم الاستمرارية. يسبب ضعف المقاومة و انهيار سابق لأوانه للهياكل [1] [2]. في ضوء ذلك, هذا العمل هو تحليل رقمي (Flac^{2D}) لتركيز الإجهاد حول تجويف دائري تحت تأثير إجهاد ثنائي المحور في الحدود. وقد تم تقييم معامل تركيز الإجهاد لثلاث حالات: ضغط ثنائي. شد أحادي المحور [3] و ضغط ثنائي المحور. تشير النتائج الى تطابق جيد بين النتائج الرقمية و تلك التحليلية.

الكلمات الدالة: التحليل الرقمي, الإجهاد, معامل تركيز لإجهاد, التجويف, إجهاد ثنائي المحور.

1 INTRODUCTION

La détermination des contraintes et déplacements est la préoccupation vitale dans le monde de calcul des éléments de structures soumises à un chargement quelconque. Le calcul des contraintes et déplacements autour des cavités, tunnels et excavations minières est un problème de grandes importances en Génie minier et Génie Civil. Ce problème a été abordé pour la première fois par Kirsch en 1898 [4].

La concentration des contraintes générées par la présence de cavité est un problème de grande importance pratique. Le facteur de concentration des contraintes a été mentionné et discuté dans la littérature pour trois cas: une compression bi axiale, une traction uni axiale et un cisaillement (traction selon l'axe horizontal et une compression selon l'axe vertical) [5] (figure 2) ; d'où ce facteur varie de 2, 3 à 4 dans le cas de compression bi axiale, traction uni axiale et chargement bi axial opposé respectivement.

Dans ce contexte, l'objectif principal de ce travail est l'analyse numérique de concentration des contraintes autour d'une cavité circulaire soumise à une traction selon l'axe horizontal et une compression selon l'axe vertical égale à T (chargement bi axial opposé). Le facteur de concentration de contraintes est estimé numériquement pour trois cas de chargement : compression bi axiale, traction uni axiale [3] et pour le chargement bi axial opposé.

2 CHAMP DES CONTRAINTES ANALYTIQUE

2.1 Solution de Kirsch

Le calcul des contraintes et déplacements autour d'une cavité circulaire de rayon a appartenant à un milieu infini, isotrope, homogène possédant un comportement élastique linéaire a été abordé pour la première fois par Kirsch en 1898 [4] (figure1).

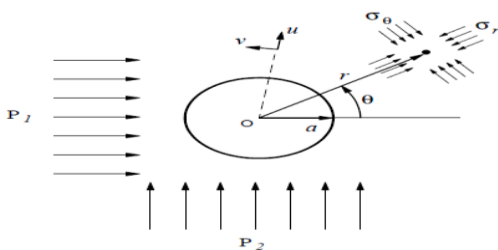


Figure 01: Contraintes autour d'une cavité dans un milieu élastique infini

Un point situé aux coordonnées polaires (r, theta) proche du trou de rayon a (figure 1) possède les contraintes données par les expressions (1) :

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{P_1 + P_2}{2} \left[1 - \frac{a^2}{r^2} \right] + \frac{P_1 - P_2}{2} \left[1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right] \cos 2\theta \\ \sigma_\theta = \frac{P_1 + P_2}{2} \left[1 + \frac{a^2}{r^2} \right] - \frac{P_1 - P_2}{2} \left[1 + \frac{3a^4}{r^4} \right] \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} = -\frac{P_1 - P_2}{2} \left[1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right] \sin 2\theta \end{cases} \quad (1)$$

Avec :

- $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ sont respectivement les contraintes radiale, ortho radiale et tangentielle.
- P_1, P_2 les charges appliquées aux limites dans la direction horizontale et verticale respectivement
- a : rayon du trou égal à 1m
- r, θ : les coordonnées polaires.

2.2 Champ de Contraintes dans le cas de chargement bi axial opposé

Si on suppose une cavité circulaire de rayon a d'un milieu infini soumise à une charge P_1 dans le sens horizontal égale à T (traction) et une charge P_2 dans le sens vertical égale à -T (compression) (figure 2). Les contraintes aux limites dans les deux directions en s'appuyant sur l'équation (1) sont égales donc à :

$$P_1 = +T \quad P_2 = -T \quad (2)$$

En substituant (2) dans (1) on obtient le champ des contraintes autour de la cavité par les expressions (3) :

$$\begin{cases} \sigma_r = +T \left[1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right] \cos 2\theta \\ \sigma_\theta = -T \left[1 + \frac{3a^4}{r^4} \right] \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} = -T \left[1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right] \sin 2\theta \end{cases} \quad (3)$$

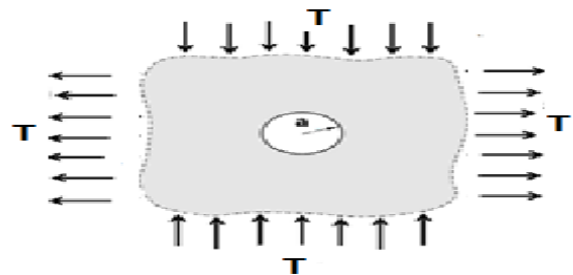


Figure 02: Cavité Circulaire soumise à un chargement bi axial opposé aux limites

La présence du trou agit pour perturber ce champ uniforme, cette perturbation est supposée de nature locale et le champ perturbé va chuter à zéro si on s'éloigne du trou [4], [5].

2.3 Facteur de concentration des contraintes

Il est évident que l'influence de la présence du trou est de caractère très local, si le rayon augmente les contraintes s'approchent très rapidement de la valeur imposée aux limites.

La concentration élevée de contrainte constatée proche du trou est d'une grande importance pratique. Comme exemple pratique on peut citer les cas des trous dans les ponts de navires [6].

La forte concentration des contraintes provoque des dégradations de la résistance et une défaillance prématurée des structures en raison de la fissuration par fatigue et la déformation plastique qui se produit fréquemment à ces points [1].

Le facteur de concentration des contraintes K est défini comme étant le rapport entre la contrainte maximale σ_{\max} et la contrainte nominale σ_{\min} . Il ne dépend que de la géométrie, le mode de chargement et le type de matériau choisi. Ce facteur est calculé analytiquement pour trois cas (figure 3). Les valeurs analytiques pour les trois modes de chargement possibles sont résumées dans le tableau 1.

Tableau 01: Facteur de concentration des contraintes K (analytique) [5]

Compression Bi axiale	2
Traction Uni axiale	3
Traction et Compression	4

3 ANALYSE NUMERIQUE

L'objectif principal de cette partie est la modélisation numérique du cas représenté sur la figure 2.

Une cavité circulaire dotée d'un rayon $a=1\text{ m}$ existe dans un milieu infini, isotrope, homogène et possédant une loi de comportement élastique. Les limites de ce milieu sont soumises à une traction dans le sens horizontal égale à $T=30.10^6\text{ MPa}$ et une compression dans le sens vertical y égale à $-T$.

Cette analyse numérique s'intéresse à la détermination de la répartition des contraintes et l'estimation du coefficient de concentration de ces contraintes pour les trois cas de chargement mentionnés sur la figure 3 en se basant sur les résultats publiés en [3].

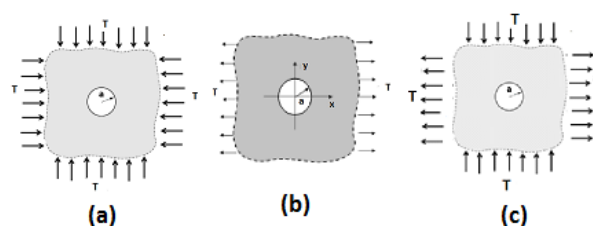


Figure 03: Cas traités; (a) compression bi axiale, (b) traction uni axiale, (c) chargement bi axial opposé

3.1 Modèle numérique

En considérant un cas de déformation plane, cette analyse peut être réduite à une analyse bidimensionnelle. Par raison de symétrie existante dans le modèle de point de vue géométrie et chargement, seulement un quart du domaine est suffisant pour faire l'analyse comme indiquée sur la figure 4.

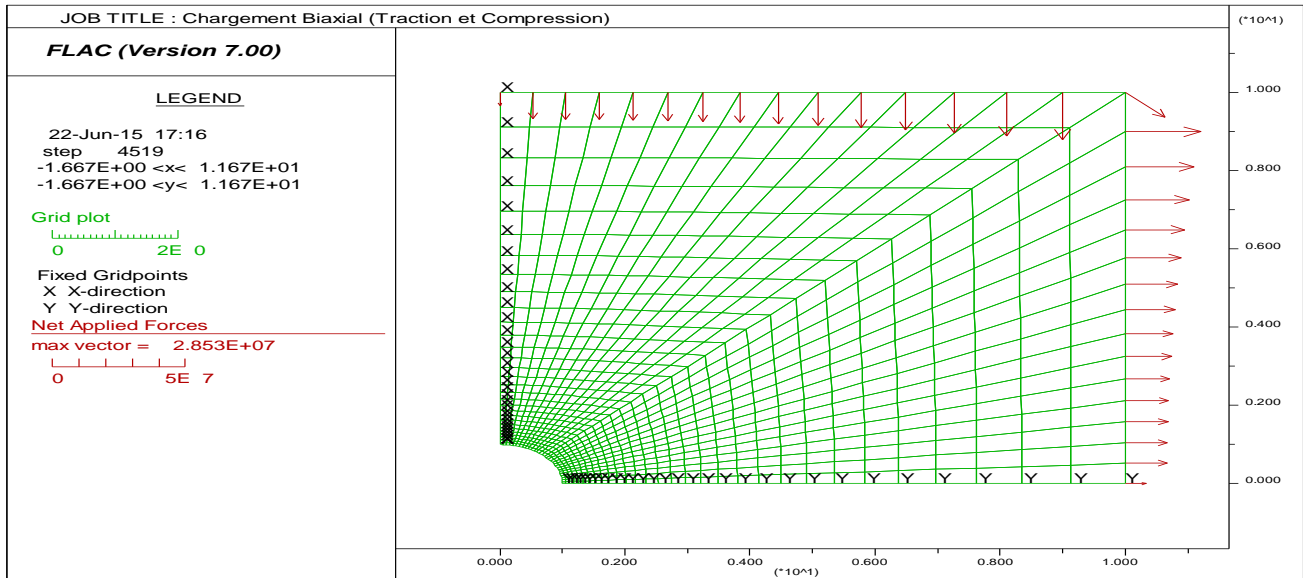


Figure 04: Maillage et Conditions aux limites

Les perturbations dans le champ des contraintes provoquées par la présence du trou diminuent rapidement en fonction de (a/r^2) et seront négligeables si on s'éloigne du trou à une distance supérieur à $10a$ [4], [7].

La figure 4 donne le maillage et les conditions aux limites types déplacements et charges imposées. Le maillage doit être raffiné au voisinage du trou pour obtenir une meilleure précision dans la zone où les contraintes et les déformations varient très rapidement d'un point à un autre [7].

3.2 Estimation numérique des contraintes autour du trou

Puisque les contraintes autour de la cavité sont fonction de

deux variables (r, θ) ; deux cas sont pris en compte :

- ✓ **Premier cas** : $\theta=0$ et r varie de $a=1m$ à $10a$: $\sigma_r \neq 0$ $\sigma_\theta \neq 0$ $\tau_{r\theta} = 0$
- ✓ **Deuxième cas** : $r=a=1m$ et θ varie de 0° à 90° : $\sigma_r \neq 0$ $\sigma_\theta = 0$ $\tau_{r\theta} = 0$

3.2.1 Premier Cas

Si $\theta=0$ et r varie de $a=1m$ à $10a$, les contraintes ; radiale σ_r , ortho radiale σ_θ et tangentielle maximale τ_{max} sont calculées numériquement (figure 5) puis comparées à celles obtenues analytiquement (3) (figure 6).

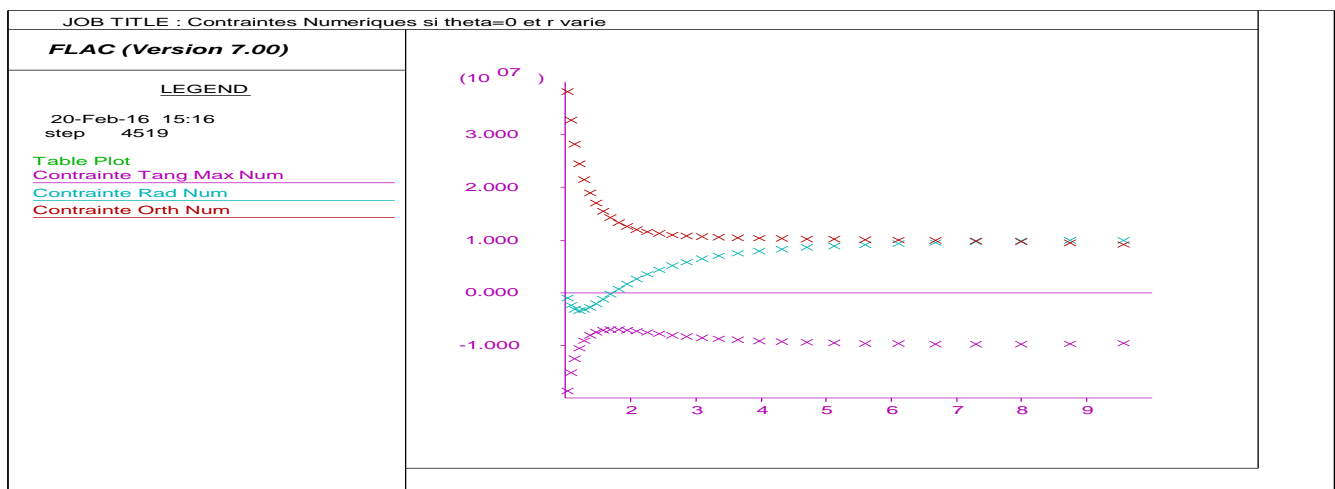


Figure 05: Courbes de Contraintes autour de la cavité obtenues numériquement en fonction de r si $\theta=0$

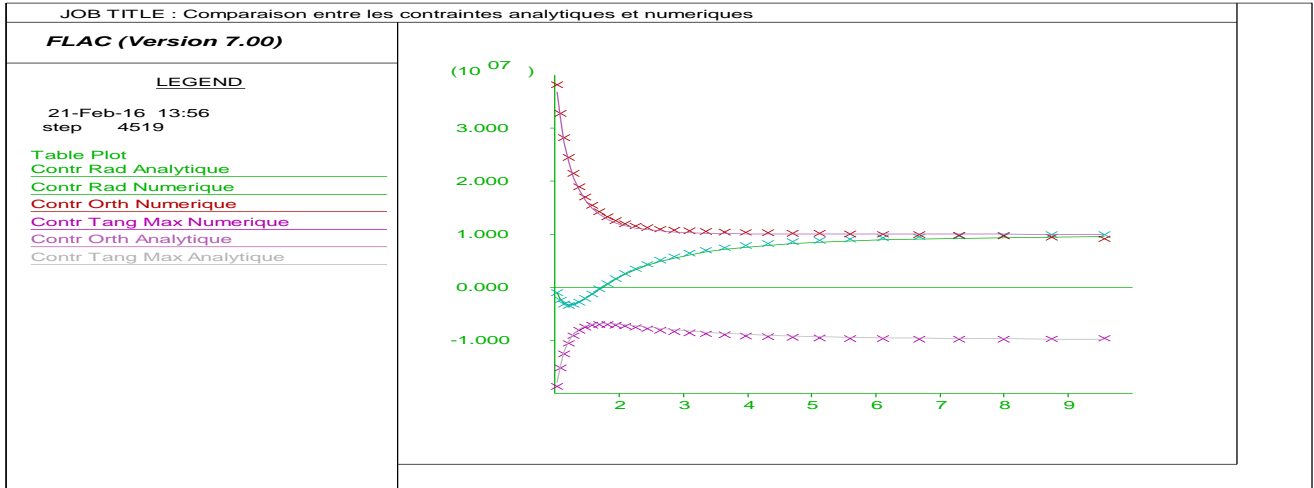


Figure 06: Comparaison entre les contraintes numériques et analytiques autour du trou en fonction de r si $\theta=0$

Un simple examen de la figure 6 nous permet de dire que les contraintes obtenues numériquement sont en très bon accord avec celles obtenues analytiquement par les formules de Kirsch ce qui nous confirme la fiabilité de modèle numérique.

Les contraintes au bord interne du trou ($r=a=1m$) sont très grandes (figure 6) elles varient très rapidement si on

s'éloigne du trou pour se stabiliser à la fin. Ce qui confirme la théorie de concentration des contraintes causée par la présence de ce trou.

Le champ de déplacement généré lors de l'application de ce type de chargement (chargement bi axial opposé) est présenté sur la figure 7. Le milieu a tendance à se déplacer d'un angle égal à 45° .

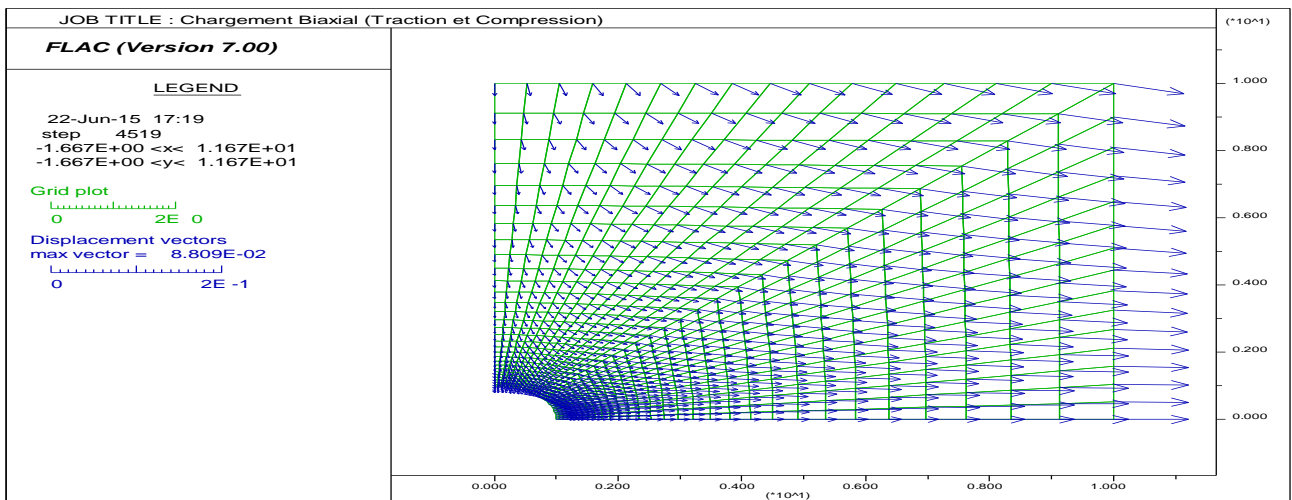


Figure 07: Vecteur déplacement autour du trou dans le cas de chargement bi axial opposé

3.2.2 Deuxième Cas

Si $r=a=1m$ c'est-à-dire on est positionné à l'arc interne de la cavité, seule la contrainte radiale existe elle vaut :

$$\sigma_r = -4 T \cos 2\theta \quad (4)$$

Elle varie de

$$\sigma_r = -4T \dots si \theta = 0^\circ \quad \sigma_r = +4T \dots si \theta = 90^\circ \quad (5)$$

Et

$$\sigma_r = 0 \dots si \theta = 45^\circ \quad (6)$$

Si $r=a=1m$ et θ varie ; les contraintes radiales sont calculées numériquement et comparées à celles obtenues analytiquement (la figure 8).

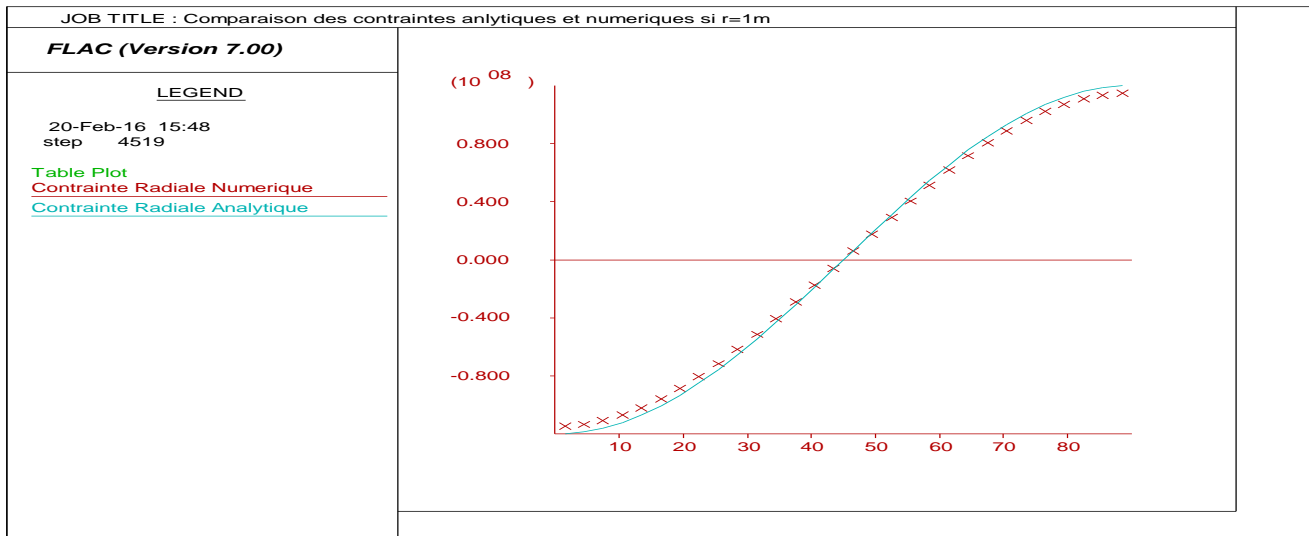


Figure 08: Comparaison entre les contraintes numériques et analytiques autour du trou en fonction de θ si $r=a=1m$

Une lecture détaillée de la courbe indiquée sur la figure 8 donne:

$$\sigma_r = -1.198.10^6 \text{ MPa} \approx -4T = -1.2.10^6 \text{ MPa} \text{ si } \theta = 0^\circ$$

$$\sigma_r = 0 \text{ MPa si } \theta = 45^\circ$$

$$\sigma_r = +1.198.10^6 \text{ MPa} \approx +4T = +1.2.10^6 \text{ MPa} \text{ si } \theta = 90^\circ$$

Ces résultats numériques se coïncident avec les résultats analytiques obtenus par les équations (5) et (6) et confirment encore une fois le bon fonctionnement de notre modèle numérique.

Selon [5], lorsqu'une cavité est soumise à un chargement bi axial opposé aux limites ce problème est équivalent à un cas de cisaillement pur (figure 9).

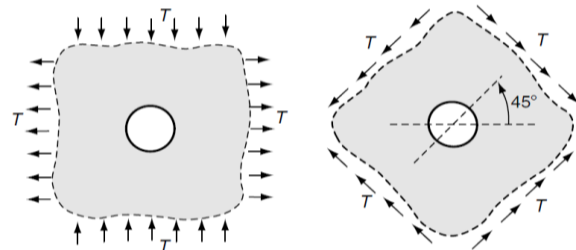


Figure 09: Cas de Cisaillement pur [5]

Afin de confirmer cette supposition, la concentration des déformations de cisaillement autour de la cavité dans le cas de chargement bi axial opposé obtenue numériquement est représentée sur la figure 10.

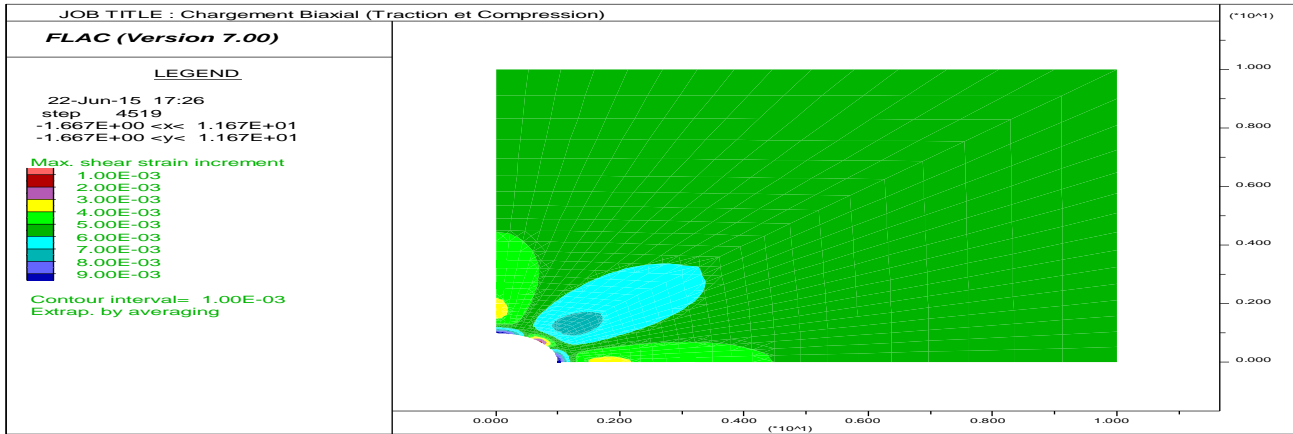


Figure 10: Zone de concentration de déformations de cisaillement autour du trou

Cette figure montre clairement le cisaillement généré autour du trou et confirme ce qui a été annoncé dans [5].

compression bi axiale, une traction uni axiale dans le sens x et un cisaillement (chargement bi axial opposé).

3.3 Facteur de concentration des contraintes

Une estimation numérique du facteur de concentration des contraintes a été faite pour trois cas différents : une

Les figures 11, 12 et 13 donnent respectivement le facteur K pour la compression bi axiale, la traction uni axiale et le cisaillement.

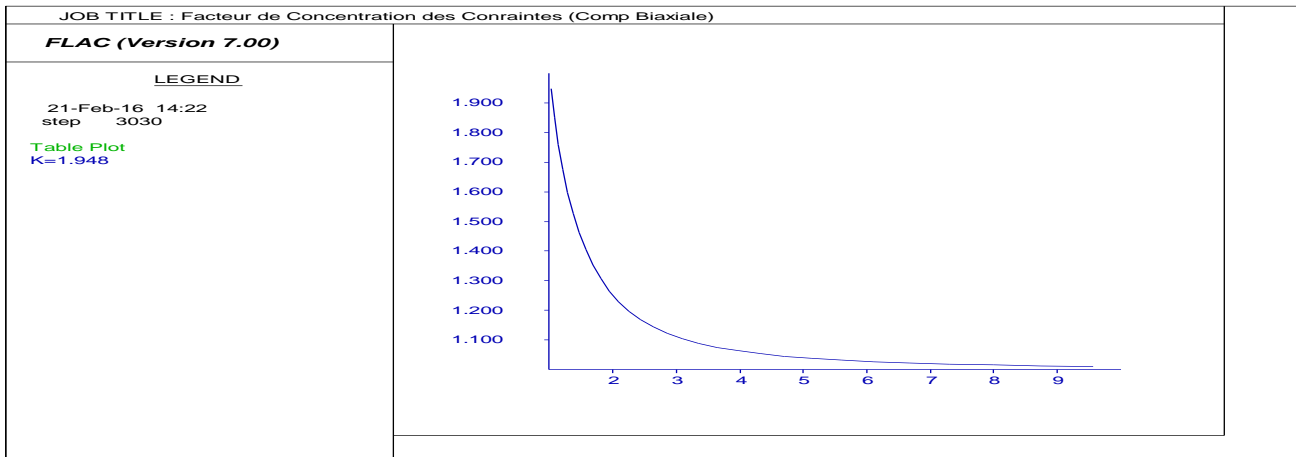


Figure 11: Facteur K; cas de compression biaxiale

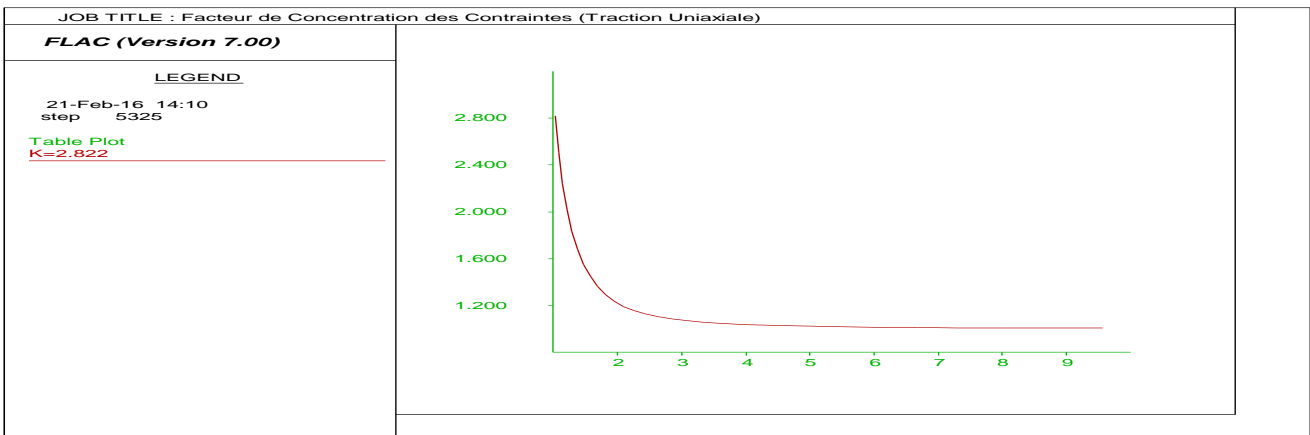


Figure 12: Facteur K; cas de traction uni axiale

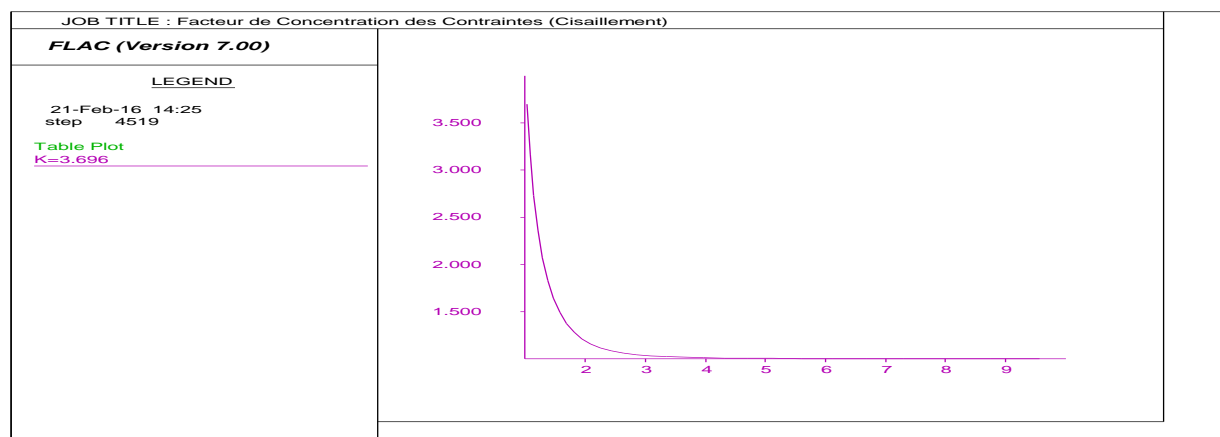


Figure 13: Facteur K; cas de cisaillemen

Les résultats numériques du facteur de concentration des contraintes sont résumés dans le tableau 2 et comparés à ceux analytiques (tableau 1).

Tableau 02 : Comparaison du facteur K numérique et analytique

	Analytique	Numérique
Compression Bi axiale	2	1.948
Traction Uni axiale	3	2.822
Cisaillement pur	4	3.696

Ces résultats montrent clairement la précision offerte par notre modèle et confirme la bonne simulation numérique.

4 CONCLUSION

On peut conclure à partir ce travail que le facteur de concentration des contraintes autour d'une cavité circulaire est maximal dans le cas de chargement bi axial aux limites. Ce chargement est équivalent à un cisaillement pur autour du trou et donnant le plus grand coefficient de concentration des contraintes (3.696).

Cette analyse met en lumière le phénomène de concentration des contraintes qui peut provoquer la rupture en raison de discontinuité du milieu. Elle n'est qu'un appel intuitif à l'impact négatif généré par le phénomène de concentration des contraintes et un développement est souhaitable c'est le calcul de ce facteur mais en plasticité.

REFERENCES

- [1] T. L. Wilson, The S.S. Leviathan, Damage, Repairs and Strength Analysis, presented at a meeting of the American Society of Naval Architects and Marine Engineers, November, 1930.
- [2] L.Ko., William., Stress Concentration Around a Small Circular Hole in the HiMAT Composite Plat, National

Aeronautics and Space Administration (NASA) California, December, 1985.

- [3] Bouali MF, Hamaidia A & Kouaoucha H, Numerical Modelling of Cylindrical Hole Under Equal Biaxial and Uniaxial Tension Loadings at the Infinity, International Review on Modeling and Simulations, ISSN 1974-9821, Vol. 7 N°5, pp. 893-899, 2014. doi:http://dx.doi.org/10.15866/iremos.v7i5.3487.
- [4] J.C. Jaeger, N.G.W. Cook & R.W. Zimmerman., Fundamentals of Rock Mechanics, Blackwell publishing, 2007.
- [5] Martin H, Saad., Elasticity Theory, Applications, and Numerics, Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.
- [6] Timoshenko & N. Goodier., Theory of Elasticity, Mcgraw HILL book company Inc., 1951.
- [7] P. Mestat., Maillages d'éléments finis pour les ouvrages de géotechnique conseils et recommandations, Bulletin laboratoires des pontes et chaussées, pp.64-89., Novembre-décembre 1997.
- [8] B. Mallikarjun., P. Dinesh., K.I. Parashivamurthy., Finite Element Analysis of Elastic Stresses around Holes in Plate Subjected to Uniform Tensile Loading, Bonfring International Journal of Industrial Engineering and Management Science, Vol. 2(No 4), December 2012.
- [9] G. C. Mokalke., M. V. Kavade., S. S. Deshpande., Analysis of a Plate With a Circular Hole by fem, IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering (IOSR-JMCE) ISSN: 2278-1684, pp: 25-30, 2010.

LISTE DES NOTATIONS

a: Rayon de la cavité.

P_1 : Contrainte de compression dans le sens horizontal.

P_2 : Contrainte de compression dans le sens vertical.

T: Contrainte de traction.

r, θ : Coordonnées polaires.

σ_r : Contrainte Radiale.

σ_θ : Contrainte Ortho radiale.

$\tau_{r\theta}$: Contrainte Tangentielle.

σ_{\max} : Contrainte Principale maximale.

σ_{\min} : Contrainte Principale minimale.

τ_{\max} : Contrainte Tangentielle maximale.